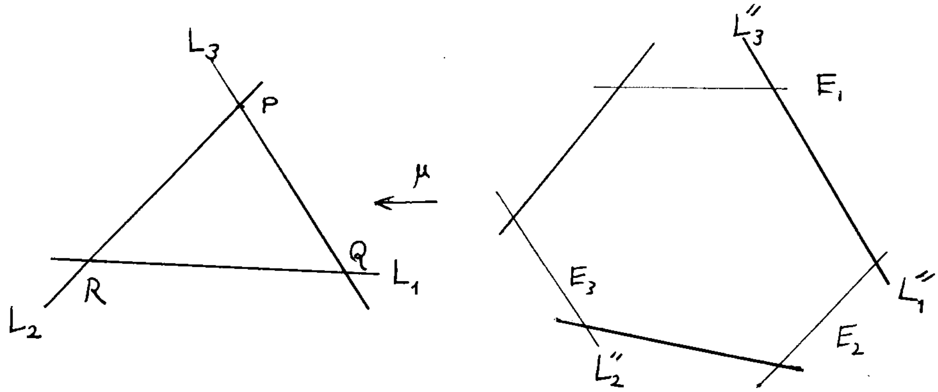
極小超曲面と Cremona 変換

飯高 茂(東大理)

§0. 序

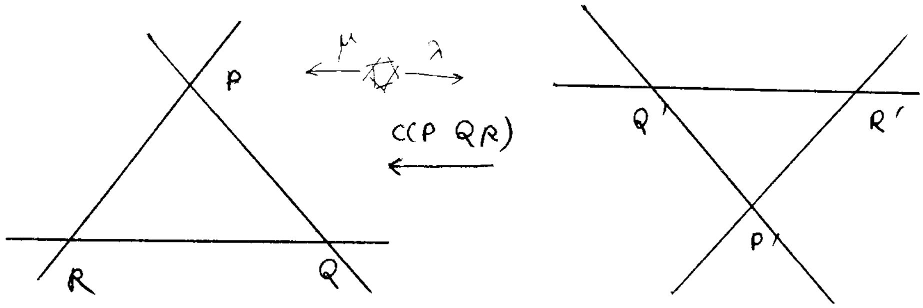
代数幾何で最も古典的な話題は平面代数曲線と2次変換であろう.

良く知られたことではあるが定義の復習をする. $\mathbb{P}^2$ 上の共線でない3点 P Q R をとり



それを中心に blow up をする. 上図のように PQR を通る3直線 L_1, L_2, L_3 の(強)変換像は $(L_i'')^2=-1$, $L_i''\cong\mathbb{P}^1$ をみたすから1点につぶせる. $E_1=\mu^{-1}(P)$, $E_2=\mu^{-1}(Q)$, $E_3=\mu^{-1}(R)$ はそれぞれ $\mathbb{P}^2$ 上の直線 N_1, N_2, N_3 になる. 即ち P, Q, R 中心の blow up と, L_1'', L_2'', L_3'' を各点 P', Q', R'

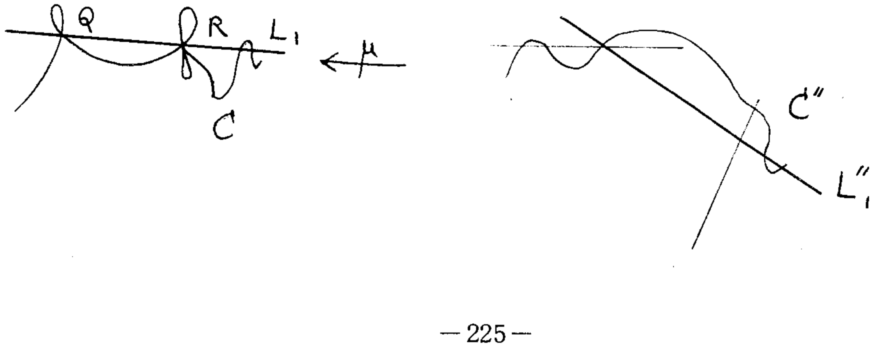
に縮める blow down λ の合成を 標準 Cremona 変換又は、単に(大域的)2次変換といい c(PQR) で示す.



さて、$\mathbb{P}^2$ 上の d 曲線を C とする. $c(PQR)^{-1}[C]$ を C' とかくとき、C' の次数はどうなるか?

$m_1 = \mathrm{mult}_P C$, $m_2 = \mathrm{mult}_Q C$, $m_3 = \mathrm{mult}_R C$ とおくとき、$\deg C' = 2d - m_1 - m_2 - m_3$ となる. また $\mathrm{mult}_{P'} C' = d - m_2 - m_3$, $\mathrm{mult}_{Q'} C' = d - m_1 - m_3$, $\mathrm{mult}_{R'} C' = d - m_1 - m_2$.

これらは、どんな特異点でも正確に成立つ. ついでにそれも見ておく.



に

$$\mu^* C = C''' + m_1 E_1 + m_2 E_2 + m_3 C_3,$$

$$C' = \lambda_* C''', \quad \lambda^* C' = C''' + e_1 L_1'' + e_2 L_2'' + e_3 L_3''$$

とかくと，

$$\lambda^* C' \cdot L_i'' = C''' \cdot L_i'' - e_i \text{ , さらに, }$$

$$\lambda^* C' \cdot L_i'' = C' \cdot \lambda_* L_i'' = 0$$

なので，

$$e_i = C''' \cdot L_i'' = \left(\mu^* C - \sum m_j E_j\right) \cdot \left(L_i - \cancel{m_j} E_j - E_k\right)$$

$$= d - m_j - m_k \text{ . 但し } \{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}.$$

よって $e_1 = d - m_2 - m_3$, $e_2 = d - m_3 - m_1$, $e_3 = d - m_1 - m_2$.

定義から $e_i = \mathrm{mult}_{P}(C')$ であった。

一方，

$$C' \cdot N_1 = \lambda^* C' \cdot \lambda^* N_1 = \left(C''' + \sum e_i L_i''\right) \cdot \left(E_1 + L_2'' + L_3''\right)$$

$$= C''' \cdot E_1 + e_2 + e_3 = m_1 + (2d - m_2 - m_3 - 2m_1)$$

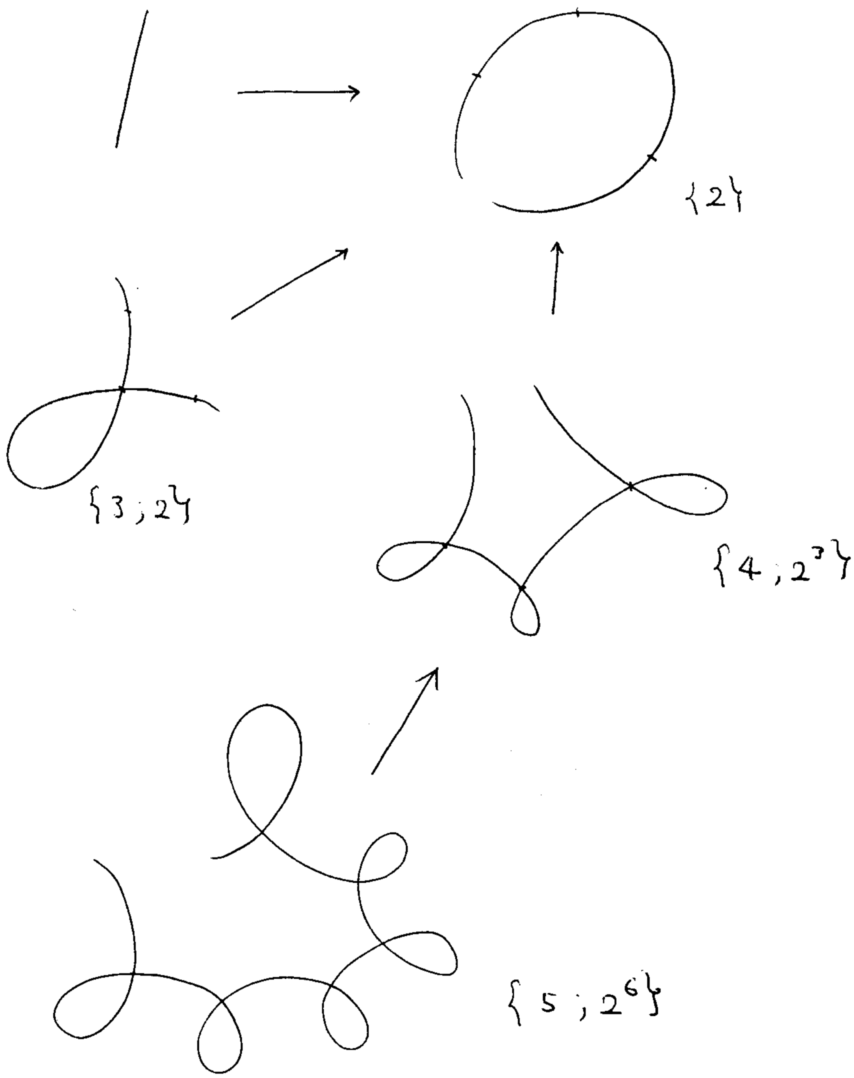
$$= 2d - m_1 - m_2 - m_3 .$$

このことは昔からよく知られていた。

これによると，6個の2重点をもつ5次曲線は，2次変換で，2重点3個の4次曲線に変換される。そして，さらにこの4次曲線は，

2

特異点中心の2次変換で2次曲線になり、2次曲線は有理直線に変換される.



$\{d;2^{i_2},3^{i_3},\dots\}$ は d 次曲線で r 重点が i_r 個を有すものとする.　図1.

3

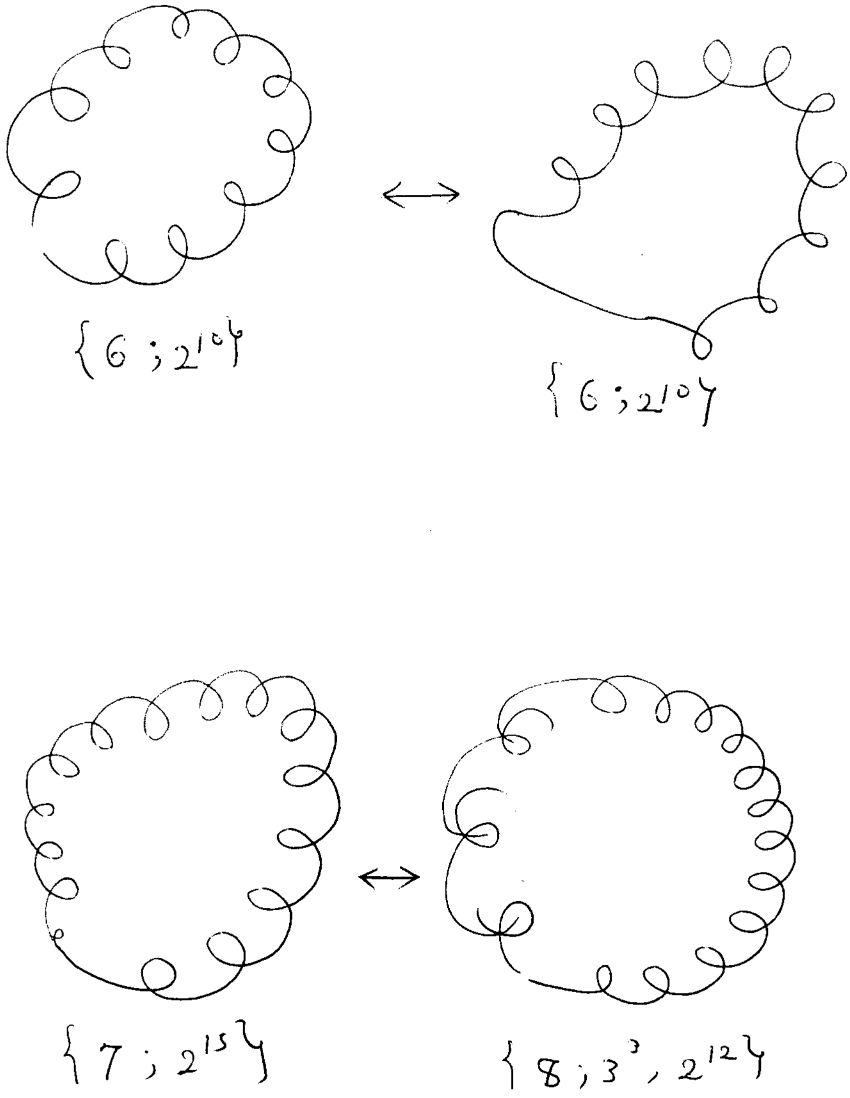


図 2

4

しかし，10個の2重点をもつ6次曲線は有理曲線ではあっても，2次変換によって次数を下げることはできない．例えば，3個の2重点を中心にもつ2次変換で変換しても，やはり6次曲線になってしまうのである．次数が7以上の2重点だけをもつ有理曲線は，さらに著しく，2次変換をすると，次数があがりかつ，3重点以上の特異点がでてくる(図2)

実は次の事実がある!!

$C \subset \mathbb{P}^2$ を有理曲線とする．

(i) $\deg C < 6$ なら $\varphi \in Bir(\mathbb{P}^2) = Cr_2$ (2次元のCremona変換群) があり固有変換 $\varphi[C]$ を直線にできる．

(ii) $\deg C \geq 7$ かつ C は2重点しかないとする．このとき 群 $G = \{\varphi \in Cr_2 \mid \varphi[C] = C\}$ は $PGL(3, \mathbb{C})$ の有限部分群になる．

(iii) $\deg C \geq 6$，かつ 2重点しかないとき，どんな $\varphi \in Cr_2$ によっても $\varphi[C]$ は直線にならない．

5

6を境界にして様子ががらりと違ってくる。

この6の持つ不思議な性質は直線族でも出てくる。

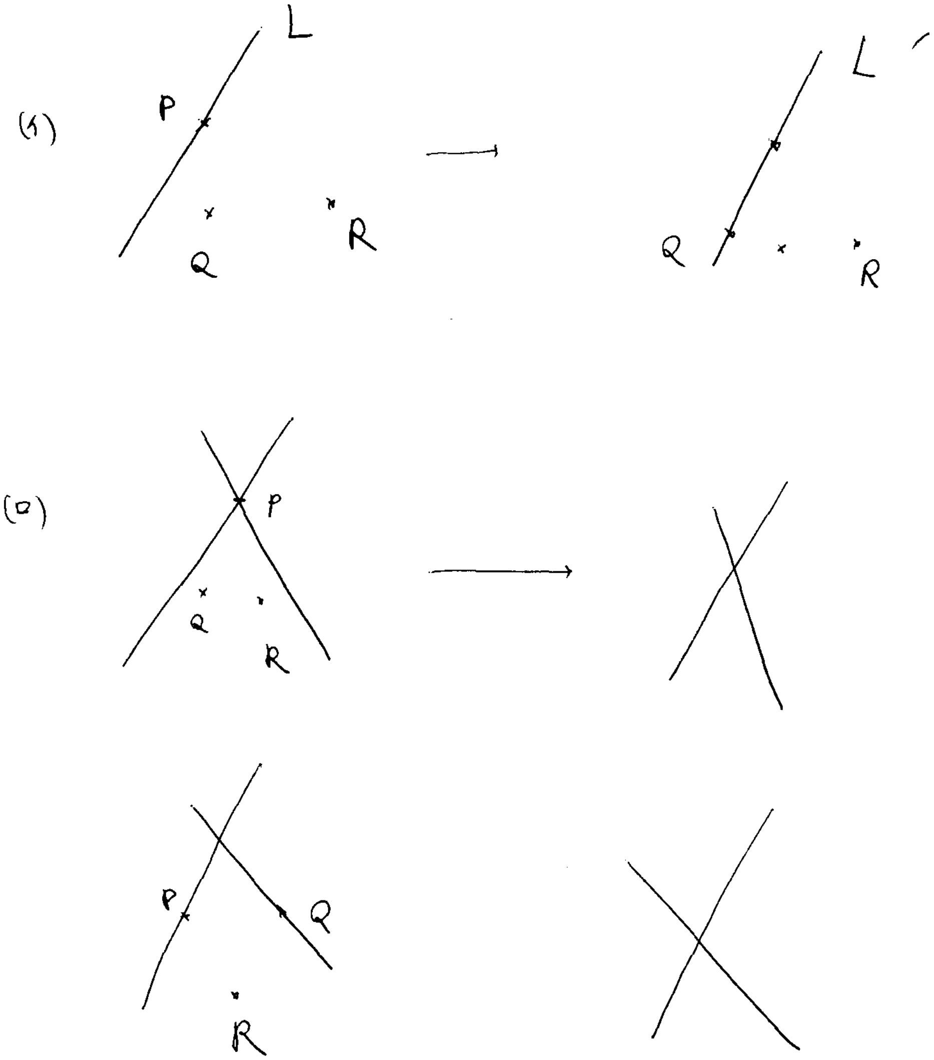


図3

6

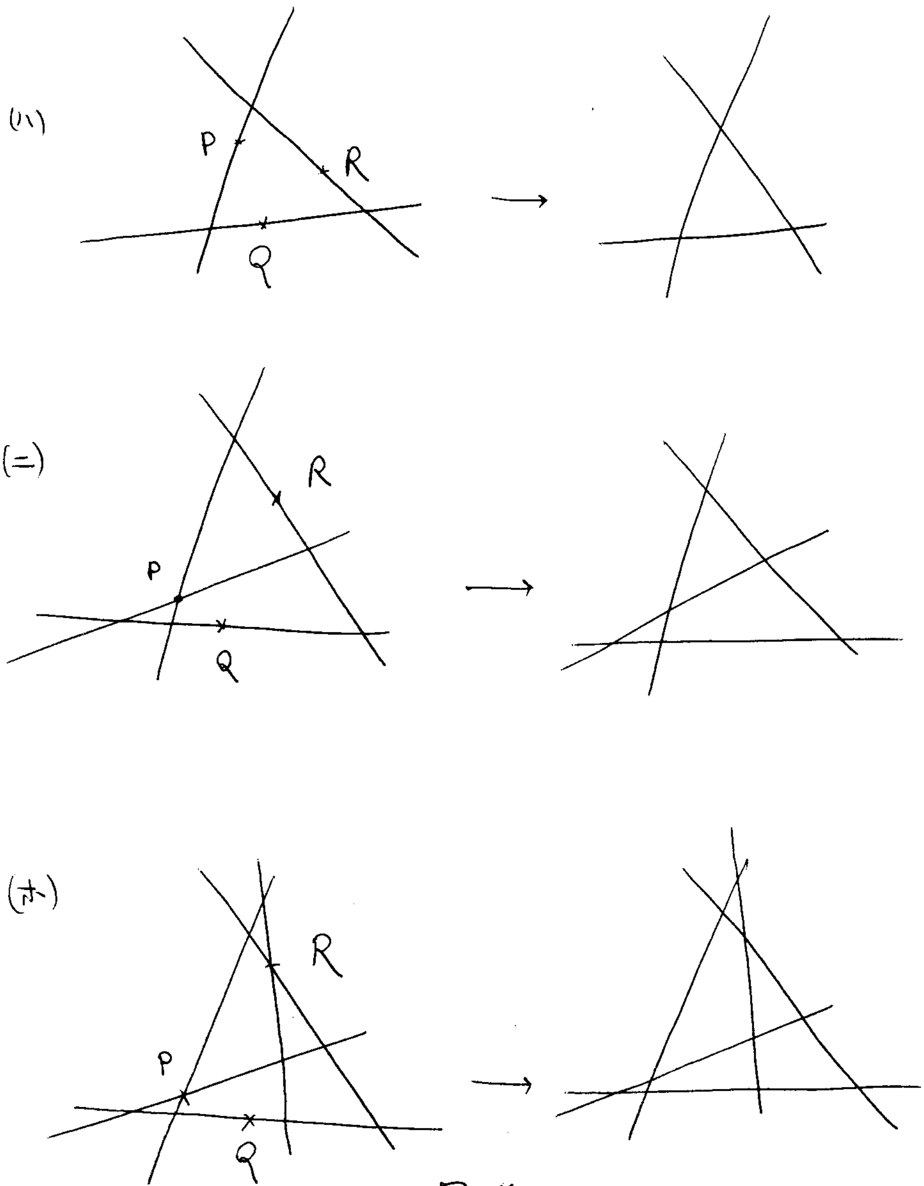


図 4

以上のどの場合も，Qは直線の上の一般の点でよいからパラメターを持ちえる．しかしそれは（一般の位置にある）5本の直線達で

ある。6本が一般の位置にあると，それらの交点を中心に選ばざるをえなくなり，連続パラメーターを持てなくなる。

Cを可約平面曲線とする。$C=\sum C_i$を既約分解とし，各C_iの生成点をξ_iとする。$\varphi \in Cr_2$が，$\overline{(\varphi(\xi_i))}$＝曲線をみたすとき，$\varphi[C]=\sum\overline{(\varphi(\xi_i))}$と定義しよう。

Cr_2は2次変換と線型変換の合成からつくられた。この事実は，双有理変換論の一つの根源的事象の一つの表れである?!!

Cを，一般の位置にあるr本の直線の和とする。

予想：「$r \leq 5$なら$Bir(C, \mathbb{P}^2)$は(イ)〜(ホ)で書かれる2次変換と線型変換で合成され，無限次元の群となるであろう。」

$r=6$のとき，$Bir(C, \mathbb{P}^2)$は離散群で，有限個の2次変換を許す。

$r \geq 7$なら，$Bir(C, \mathbb{P}^2)$は，有限線型群。

§1. 強変換(固有変換).

以下, V, W で, n 次元の完備正規多様体を表し, $f: W \longrightarrow V$ を支配的有理写像とする. Γ を V の素因子, ξ をその生成点とする. $f^{-1}(\xi)$ は, 有限集合 $\{\eta_1, \cdots, \eta_r\}$ になるが, その閉包 $\{\eta_j\}^-$ が皆素因子になるとき, f を Γ に関して pure とよび; $f^{-1}[\Gamma] = \sum_{j=1}^{r} \{\eta_j\}^-$ と $f^{-1}[\Gamma]$ を定める. 一般に, $D = \sum \Gamma_i$ を V の被約因子とするとき, すべての i について, f が Γ_i-pure のときのみ, f を D に関して pure とよび, $f^{-1}[D] = \sum_{i=1}^{r} f^{-1}[\Gamma_i]$ と書く.

f が正則写像なら, f はつねに pure である. 一方 $f \in Bir(V)$ のとき, $f^{-1}(\xi_j)$ に η_j があり, $\{\eta_j\}^-$ が素因子なら, ZMT により $f^{-1}(\xi_j) = \eta_j$ で, $\{\xi_j\}^-$ と $\{\eta_j\}^-$ は双有理同値. 従って, $f^{-1}[D]$ と D の既約成分の数は等しく, f^{-1} は $f^{-1}[D]$ に関して pure である. よって $V = W$, $Bir(D, \mathbb{P}^2) = \{\varphi \in Bir(V) \mid \varphi^{-1}[D] = D\}$ は群になる.

誤解のない為に V と被約正因子の対を

9

$(D \& V)$ と記す.

$f: W \longrightarrow V$ を支配的有理写像とするとき, f と D に関して pure と仮定し, さらに $\Delta \geq f^{-1}[D]$ のとき, f を $(\Delta \& W)$ から $(D \& V)$ への有理写像という.

f が双有理写像であって $\Delta = f^{-1}[D]$ のとき, $f: (\Delta \& W) \to (D \& V)$ を双有理写像という.

そして, $(D \& V)$ の双有理幾何を展開するのが目的である.

§2 Non-singular model と m-種数

V が非特異完備で, D が非特異の因子, 即ち, 非特異素因子の非特異連結和とするとき, $(D \& V)$ を非特異という.

一方, 与えられた任意の $(D \& V)$ について, それと双有理同値な非特異 $(\Delta \& W)$ が存在する. もう少し説明しよう. まず, 広中の定理により, 非特異 V^* と固有双有理正則写像 $\mu: V^* \longrightarrow V$ がある. さらに, V^* をうまく選べば, $\Delta = \mu^{-1}[D]$ は非特異にできる. $W = V^*$ととる

と，$(\Delta \vartheta W)$ が，$(D \vartheta V)$ の非特異モデルである．

対数的種数の理論では，$\mu^{-1}(D)$ が正規交叉になるとしたので，ここより条件が強い．理論上は，ここまで仮定した上で，$\mu^{-1}[D]$ を考えるとよいが，具体例では，$\mu^{-1}[D]$ の非特異性のみを要求する方が，はるかに簡単便利である．

$(D \vartheta V)$ を非特異とし，$\omega_V(D)$ を考える．$\dim H^0(\omega_V(D)^m)$ は $(D \vartheta V)$ の双有理不変になることを証明する．その為には，次の分岐公式を示すのがわかり易い．

§3. 分岐公式

$(\Delta \vartheta W)$ と $(D \vartheta V)$ を非特異とする．$f : W \to V$ を全射正則写像とし，この時，次の公式を示す．

分岐公式

$$K(W) + \Delta \sim f^*(K(V) + D) + R\vartheta_f ,$$

但し，$R\vartheta_f$ は W 上の正因子である．

$f^{-1}(D)$ は単純正規交叉であると仮定して証明

すればよい。

そこで、$f^{-1}(D) = f^{-1}[D] + E_1 + \cdots + E_s$ ，と素因子 E_j で書き表わすと、$\mathrm{codim}\,(f(E_j)) \geq 2$ である。

$f^*\omega_V(D)$ を計算するために、$W=\bigcup_\alpha W_\alpha$ を座標被覆とし、W_α の局所座標系 $w_\alpha=(w_\alpha^1, \dots, w_\alpha^n)$ は $f(W_\alpha) \subset V_\lambda$ と番号づけておく。D の V_λ での定義式を δ_λ ，Δ の W_α での定義式を h_α とかく。さらに $d_D z_\lambda = dz_\lambda/\delta_\lambda$ ，$d_\Delta w_\alpha = dw_\alpha/h_\alpha = dw_\alpha^1 \wedge \cdots \wedge dw_\alpha^n/h_\alpha$ とおく。

$$f^*(d_D z_\lambda) = \psi_{\alpha\lambda}\, d_\Delta w_\alpha$$

で W_α 上の関数 $\psi_{\alpha\lambda}$ を定めるが、$\psi_{\alpha\lambda}$ が正則になることを証明しよう。

$\psi_{\alpha\lambda}$ が正則になることをみるには、Hartogs の定理により、$\mathrm{codim}\,F \geq 2$ の閉集合 F の外でみれば、よいから、$f^{-1}(D)$ の各既約成分の一般の点で、正則性を示せば十分である。一方、$f^{-1}[D]$ の各既約成分の一般の点では、$f^{-1}(D)$ に対する正則性（即ち、対数的分岐因子が正になること、ここで、$W - f^{-1}(D) \longrightarrow V - D$ に対する対数的分岐因子を考えた）によりOKなのだから、

各 E_j の一般の点で考察する。そこでは、$\Delta = f^{-1}(D)$ は空なので、$h_\alpha = 1$ になる。E_j の W_α での定義式を $w_\alpha^1 = 0$ としよう。さらに、$\delta_\lambda = z_\lambda^1$ としよう。$\operatorname{codim} f(E_j) \geq 2$ かつ、$f(E_j) \subsetneq \Delta$ なので、p を $w_\alpha^1 = \cdots = w_\alpha^n = 0$ とするとき、$f(p)$ は $f(E_j)$ の一般の点で、かつ、$f(p)$ は $z_\lambda^1 = \cdots = z_\lambda^n = 0$ と仮定してよいことは、やはり Hartogs の定理による。

$f(p)$ は $f(E_j)$ の一般の点だから、$f(E_j)$ の非特異点であり、$z_\lambda^1 = z_\lambda^2 = 0$ に含まれる（$f(p)$ の近傍 V_λ において）としてよい。すると、$f^* z_\lambda^1 = (w_\alpha^1)^\nu \varphi_1$, $\nu > 0$, $\varphi_1(0, w_\alpha^2, \dots, w_\alpha^n) \neq 0$; $f^* z_\lambda^2 = (w_\alpha^1)^\mu \varphi_2$, $\mu > 0$, $\varphi_2(0, w_\alpha^2, \dots, w_\alpha^n) \neq 0$ と書くことができる。

$$f^*\left(\frac{dz_\lambda^1}{z_\lambda^1} \wedge dz_\lambda^2 \wedge \cdots\right) = \nu\left(\frac{dw_\alpha^1}{w_\alpha^1} + \frac{d\varphi_1}{\varphi_1}\right) \wedge (w_\alpha^1)^\mu \varphi_2 \cdot$$

$$\mu \frac{dw_\alpha^1}{w_\alpha^1} + \frac{d\varphi_2}{\varphi_2}\Big) \wedge \cdots ,$$

を計算すると直ちに $\psi_{\alpha\lambda}$ は w_α^1 について正則になることがわかる。

$\{\operatorname{div}(\psi_{\alpha\lambda})\}$ は W 上の正因子を定めるから、これ

を R_{ϑ_f} とおくと，$\mathcal{O}(R_{\vartheta_f})|_{W_\alpha} = \mathcal{O}_{W_\alpha}\cdot 1/\psi_{\alpha\lambda}$. ゆえに，$f^*\omega_V(D)|_{W_\alpha} = \mathcal{O}(-R_{\vartheta_f})|_{W_\alpha}\cdot \omega_W(\Delta)|_{W_\alpha}$ がえられたから，

$$f^*\omega_V(D) = \mathcal{O}(-R_{\vartheta_f})\cdot \omega_W(\Delta).$$

これを因子で書きかえれば，

$$f^*(K(V)+D) \sim -R_{\vartheta_f} + K(W) + \Delta.$$

さて，f を双有理かつ，$\Delta = f^{-1}[D]$ とすると，上の証明から R_{ϑ_f} は $\overline{R}_f$ と素因子 E_j で，$\mathrm{codim}(E_j) \geq 2$ のずれしかおきえないので，f に関して例外的，ゆえに $m>0$ について常に，

$$l(m(K(W)+\Delta)) = l(m(K(V)+D)).$$

この事実は鈴木秀一（立教大）氏により初めて証明された[6]. 彼の証明は，双有理正則写像を permissible monoidal transformations に分解して，一歩一歩調べるものである。

§4 小平次元.

与えられた (D, V) に対して，その非特異モデ

デル $(\Delta \forall W)$ をとり, $m>0$ に対し $H^0(m(K(W)+\Delta)) = H^0(\omega_W(\Delta)^m)$ を考えると, 前節での不変性により, これは, 非特異モデルのとり方によらない. そこで,

$$T_{\{m\}}(D \forall V) := H^0(\omega_W(\Delta)^m)$$
$$P_m(D \forall V) := \dim T_{\{m\}}(D \forall V)$$
$$\kappa(D \forall V) := \kappa(\Delta + K(W), W) = \bar{\kappa}(W - \Delta)$$

とおく.

$P_m(D \forall V)$ は $(D \forall V)$ の m-種数, $\kappa(D \forall V)$ は $(D \forall V)$ の小平次元である(定義).

一般に $f: (D_1 \forall V_1) \longrightarrow (D \forall V)$ が支配的有理写像なら, 単射の線型写像

$$f^*: T_{\{m\}}(D \forall V) \longrightarrow T_{\{m\}}(D_1 \forall V_1),$$

が導かれ, 従って $P_m(D \forall V) \leq P_m(D_1 \forall V_1)$, 又, $\kappa(D \forall V) \leq \kappa(D_1 \forall V_1)$.

f が双有理正則で, $f^{-1}[D] \leq D_1 \leq f^{-1}(D)$ なら $P_m(D_1 \forall V_1) = P_m(D \forall V)$, $\kappa(D_1 \forall V_1) = \kappa(D \forall V)$.

§5 双有理群

$\mathrm{Bir}(D \Subset V) = \{\varphi \in \mathrm{Bir}(V) \mid \varphi[D] = D\}$ とおくとき，前節の事実により，$\mathrm{Bir}(D \Subset V)$ は $T_{lms}(D \Subset V)$ を表現空間にもつことがわかる．

もし，$(D \Subset V)$ が非特異で，$K(V)+D$ がアンプルなら，$m(K+D)$ が very ample になる $m>0$ をえらぶと，$f \in \mathrm{Bir}(D \Subset V)$ に対し，$\Phi_{m(K+D)}$ を Φ_n とかけば，

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\Phi"'] & V \arrow[d, "\Phi"] \\ \mathbb{P}^N \arrow[r, "\tilde{f}_*"] & \mathbb{P}^N \end{tikzcd}$$

$N = P_m(D \Subset V)-1$ として，上の図式ができ，よって，$\mathrm{Bir}(D \Subset V) \subseteq \mathrm{Aut}_D(V)$ となる．とくに，$V=\mathbb{P}^n$ で D が $\mathbb{P}^n$ 内の $\deg > n+1$ の非特異超曲面なら，$\mathrm{Bir}(D \Subset \mathbb{P}^n) \subseteq PGL(n+1)$ になる．

さて，一般に次の事実が成立する．

定理 $\kappa(D \Subset V) = \dim V$ なら $\mathrm{Bir}(D \Subset V)$ は有限群．

証明は極めて簡単である．$(D \Subset V)$ は非特異

としてよく, $m \gg 0$ にとると, $\Phi_m = \Phi_{m(K+D)}$ は V から $Y_m = \Phi_m(V)$ への双有理写像としてよい. さらに $(D \forall V)$ を取り換えて, Φ_m は正則としてよい. $f \in Bir(D \forall V)$ に対し, $f^* : T_{(m)}(D \forall V) \longrightarrow T_{(m)}(D \forall V)$ は同型で, それは線型同型 $f_1 : \mathbb{P}^N \longrightarrow \mathbb{P}^N$ を導く. 即ち次の可換図式をうる:

$$
\begin{tikzcd}
V \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\Phi_m"'] & V \arrow[d, "\Phi_m"] \\
Y_m \arrow[d, hook] & Y_m \arrow[d, hook] \\
\mathbb{P}^N \arrow[r, "f_1", "\sim"'] & \mathbb{P}^N
\end{tikzcd}
$$

$F = \Phi_m(D)$ は閉集合である. $D = \sum \Gamma_i$ と既約分解し, Γ_i の生成点を ξ_i とする. F の生成点は $\Phi_m(\xi_i)$. $f_1 \Phi_m(\xi_i) = \Phi_m f(\xi_i) \in F$ なので, $f_1(F) \subseteq F$. f_1 は同型だから, $f_1(F) = F$. よって $f \in Bir(D \forall V)$ は $f_1 \in Aut(Y_m - F)$ を与える. $D \subseteq \Phi_m^{-1}(F)$ だから, $\bar{\kappa}(V - D) \leq \bar{\kappa}(V -$

$\Phi_m^{-1}(F)) = \bar{\kappa}(Y_m - F)$. 一方 $n = \kappa(D \& V) = \bar{\kappa}(V - D)$ なので，$\bar{\kappa}(Y_m - F) = \dim Y_m = n$. よって $\mathrm{Aut}(Y_m - F)$ は有限群．一方，$V \longrightarrow \Phi_m(V) = Y_m$ は双有理だから，$\mathrm{Bir}(V) \cong \mathrm{Bir}(Y_m)$ かつ

$$
\begin{array}{ccc}
\mathrm{Bir}(V) & \cong & \mathrm{Bir}(Y_m) \\
\cup & & \cup \\
\mathrm{Bir}(D \& V) & \longrightarrow & \mathrm{Aut}(Y_m - F)
\end{array}
$$

により，$\mathrm{Bir}(D \& V) \subseteq \mathrm{Aut}(Y_m - F)$. よって $\mathrm{Bir}(D \& V)$ は有限群．

このようにして，小平次元により $(D \& V)$ が双有理的によく捉えられることがわかる．

文献(2)では，$(D \& V)$ を，V が完備でないときにも考察し，同様の有限性が一般に証明されている．しかし，idea は全く同じである．

W を $\mathbb{P}^n$ の超曲面とするとき，$\mathrm{Bir}(W \& \mathbb{P}^n) \longrightarrow \mathrm{Bir}(W)$ の像を W の Cremona 変換群という．それに対し，$\mathrm{Bir}(W)$ を W の Riemann 変換群ということもある．

18

§6 極小性

極小モデルの問題は、双有理幾何での基本問題の一つである。

Hを非特異完備多様体上のample因子とし、偏極多様体 (V, H) を考える。これを固定した所で、$(D \subset V)$ の極小性を次のように定義する：

$(D \subset V)$ が <u>H-相対的極小</u> $\Leftrightarrow$

$\forall f \in Bir(V)$,（但し、f は D-pure）に対し

$D \cdot H^{n-1} \leq f[D] \cdot H^{n-1}$.

$D \cdot H^{n-1}$ は H で計測した D の次数だから、V 内での双有理変換像の中で、次数最小のものを、H-相対的に極小というわけであり、任意の $(\Delta \subset V)$ に対し、その存在は明らか。即ち Δ の V 内の双有理変換像の中で、次数最小のものを D とするとき、$(D \subset V)$ を $(\Delta \subset V)$ の H-相対極小モデルとよぶ。

与えられた $(\Delta \subset V)$ に対し、(V, H) の同型を除いて、唯1つしか H-相対的極小モデルが存在し

19a

ないとき，H－弱極小モデルとよぶ．次にH－極小モデルを定義しよう．

$(\mathcal{D}\ \vartheta\ V)$ が H－極小

$\Leftrightarrow$ (1) $(\mathcal{D}\ \vartheta\ V)$ が H－相対的極小，

(2) $H^{n-1}\cdot D = H^{n-1}\cdot f[D]^{n-1}$ のとき $f\in \mathrm{Aut}(V)$

かつ $f^*H\sim H$．（～は線型同値を示す）．

定義により，H－極小な $(\mathcal{D}\ \vartheta\ V)$ に対しては，

$\mathrm{Bir}(\mathcal{D}\ \vartheta\ V) \subseteq \mathrm{Aut}_H(V) = \{\varphi\in \mathrm{Aut}(V) \mid \varphi^*H \sim\}$．

とくに，$V=\mathbb{P}^n$ のとき，$\mathrm{Aut}_H(V)=\mathrm{Aut}(V)=PGL(n+1)$ だから，$(W\ \vartheta\ \mathbb{P}^n)$ が H－極小なら，$\mathrm{Bir}(W\ \vartheta\ \mathbb{P}^n) \subset PGL(n+1)$．

一般に言えば，殆んどすべての $(\mathcal{D}\ \vartheta\ V)$ は，H－極小なのだが，それが実際になることを確認することは難しい．

例．C を $\mathbb{P}^2$ 内の非特異2次曲線とする．C上の共線でない3点をとると，それらを中

196

心に2次変換 $\varphi: \mathbb{P}^2 \longrightarrow \mathbb{P}^2$ が定義され $\varphi[C]$ も非特異3次曲線になる。$(C \subset \mathbb{P}^2)$ も $(\varphi[C] \subset \mathbb{P}^2)$ もH-相対的極小であるが、$\varphi \notin \mathrm{Aut}(\mathbb{P}^2)$ だから、これらはH極小ではない。恐らく弱極小でもないと思われるが、よくわからない。

同様にして、2重点だけの6次有理曲線 C をとると、$(C \subset \mathbb{P}^2)$ は相対的に極小だが、H-極小ではないことがわかる。

次の命題は1ヶ月程予想として、さらしものにしておいたのだが、藤田隆夫氏がたちどこに解いて城崎シンポジウム初日に教えてくれた(流石!)。

命題(藤田). $V \subset \mathbb{P}^n$ を非特異超曲面とする。

(i) $\deg V \geq n+1$ なら $(V \subset \mathbb{P}^n)$ は H-相対的極小.

(ii) $\deg V \geq n+2$ なら $(V \subset \mathbb{P}^n)$ は H-極小.

証明. $d = \deg V$, $\varphi \in Cr_n$ による変換 $V' = \varphi[V]$ は、次数 d' の超曲面とする.

2°

$$P_m(V' \ni \mathbb{P}^n) = P_m(V \ni \mathbb{P}^n) = \ell(m(d-n-1))$$

である．そして，容易に，

$$P_m(V' \ni \mathbb{P}^n) \le \ell(m(K(V')+V')) = \ell(m(d'-n-1))$$

がわかる．

$d \ge n+1$ なら，$m=1$ で，
よって，

$$\ell(m(d-n-1)) \le \ell(m(d'-n-1))$$

がわかる．

$d = n+1$ なら，$d' \ge n+1$．よって $d' \ge d$．

$d \ge n+2$ でも m^{n-1} の係数をくらべて $d' \ge d$ をえる．

$d \ge n+2$ かつ $d = d'$ とする．$m=1$ として，前式の等式 $P_1(V' \ni \mathbb{P}^n) = \ell((d'-n-1)H)$ を用いる．即ち，$(Y \ni W)$ を $(V' \ni \mathbb{P}^n)$ の非特異モデルとすると，次の可換図式をえる：

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{P}^N & V \arrow[l, "\Phi_1"'] \arrow[r, phantom, "\subset"] & \mathbb{P}^n \\
\mathbb{P}^N & V' \arrow[u, "f"'] \arrow[l, "\mathrm{vero}"'] \arrow[r, phantom, "\subset"] & \mathbb{P}^n \\
& Y \arrow[u] \arrow[ul, "\Phi_1"] \arrow[r, phantom, "\subset"] & W \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

ここに Vero は、$\mathbb{P}^n$ の $d-n-1$ - Veronese embedding による埋込と $V' \subset \mathbb{P}^n$ の合成。として $\Phi : V \subset \mathbb{P}^N$ は 同じく Vero. である。ゆえに f は同型で、従って、線型になる。

$\mathbb{P}^2$ 内の2重点10個の6次曲線 C については、$\kappa(C \vee \mathbb{P}^2) = 0$、H-相対的に極小だが、H極小にならないこともあると想像される。

一般に、固有双有理幾何では、

相対的極小モデルは存在し、

$\kappa = n$ なら相対的極小モデルは極小になることが、$n=2$ なら正しい。完備非特異のとき $\kappa \geq 0$ なら極小になったが、それは話がうますぎる。一般に期待できないことだろう。

§7. 2重点曲線

平面曲線のH-極小性は，比較的興味深い問題である．それを一般に論じることは後に回し，ここでは，2重点のみをもつ平面曲線を考えてみる．

C を $g(C)=0$，$d=\deg C$，C の特異点は皆2重点とする．しかし，無限に近い特異点も許容する．特異点の数 l は $(d-1)(d-2)/2$ である．

$S_0=\mathbb{P}^2$ として，l 回2次変換（局所2次変換）して，C の非特異モデル C_l を得る．即ち，次の列

$$\begin{array}{ccccccccc} S_l & \xrightarrow{\mu_l} & S_{l-1} & \xrightarrow{\mu_{l-1}} & \cdots & \longrightarrow & S_1 & \xrightarrow{\mu_1} & S_0=\mathbb{P}^2 \\ \cup & & \cup & & & & \cup & & \cup \\ C_l & & C_{l-1} & & & & C_1 & & C_0=C \end{array}$$

C_j を C_{j-1} の μ_j による固有変換，即ち $\mu_j^{-1}[C_{j-1}]$ とする．$E_j=\mu_j^{-1}(p_j)$，但し p_j は μ_j の中心で，$\{p_1,\ldots,p_l\}$ は C の無限に近い特異点までこめた C の特異点全部とする．$\varphi_j=\mu_{j+1}\circ\cdots\circ\mu_l$:

$S_\ell \longrightarrow S_j$ とおき，$\varphi_j^* F$ を F と略記する．
$K_\ell = K(S_\ell)$ とするとき，

$$K_\ell + C_\ell \sim (d-3)H - E_1 - \cdots - E_\ell .$$

ここに H は $\mathbb{P}^2$ の直線である．$\widetilde{E} = E_1 + \cdots + E_\ell$
とおくと，

$$C_\ell \sim dH - 2\widetilde{E}$$

なので，

$$2(K_\ell + C_\ell) \sim (d-6)H + C_\ell .$$

よって $d \geqq 6$ なら $\varkappa(C \,\&\, \mathbb{P}^2) \geqq 0$．
$C_\ell^2 = d^2 - 4\ell = -4 - d(d-6)$．さて，$d \leqq 5$ なら $C_\ell^2 \geqq 1$．

$$(K_\ell + C_\ell, C_\ell) = 2g(C_\ell) - 2 = -2$$

なので，

$|m(K_\ell + C_\ell)| \neq \phi$ であれば，$F \in |m(K_\ell + C_\ell)|$ に対し，$F \cdot C_\ell = -2m$．ゆえに，$C_\ell^2 > 0$ であれば $FC_\ell \geqq 0$ となり矛盾．従って $d \leqq 5$ なら $\varkappa(C \,\&\, \mathbb{P}^2) = -\infty$ がわかった．次節の定理によると，このような C は $\varphi \in Cr_2$ により，直線になることがわかる．

24

$d=6$ とすると、

$$2(K_\ell + C_\ell) \sim C_\ell$$

かつ $C_\ell^2 = -4$. C_ℓ は無論既約だから、

$$P_{2m}(C \vee \mathbb{P}^2) = 1, \quad P_{2m+1}(C \vee \mathbb{P}^2) = 0 \text{ が出る.}$$

$d \geqq 7$ としよう.

$$2(K_\ell + C_\ell) \sim (d-6)H + C_\ell$$

なので、次の補題に注目する.

補題 Γ を既約とし、D を正因子とする. $(\Gamma + D, \Gamma) < 0$ なら $|\Gamma + D|$ は Γ を固定成分にする.

証明は自明だから略.

そこで $\Phi_2 = \Phi_{2(K_\ell + C_\ell)} : S_\ell \longrightarrow \mathbb{P}^N$, $N = P_2 - 1$ を考えると、$\Phi_2 = \Phi_{(d-6)H}$ だから、S_ℓ は $S_\ell \to S$ と $S \subset \mathbb{P}^2 \subsetneq \mathbb{P}^N$, $\mathbb{P}^2 \hookrightarrow \mathbb{P}^N$ は $d-6$ 次の Veronese 埋入との合成. $f \in \mathrm{Bir}(C \vee \mathbb{P}^2)$ は Veronese の間の同型を惹き起こすから、結局、$\mathbb{P}^2$ の同型となる. ゆえに、

$$\mathrm{Bir}(C \vee \mathbb{P}^2) = \mathrm{Aut}_C(\mathbb{P}^2) = \{\varphi \in \mathrm{Aut}(\mathbb{P}^2) \mid \varphi C = C\}.$$

C と Γ とを $\mathbb{P}^2$ の 2重点のみの有理曲線とする. $\deg C \geq 7$ かつ, $f \in \mathrm{Bir}(\mathbb{P}^2)$ が $\Gamma = f^{-1}[C]$ をみたすなら, 前と同じ論法により $f \in PGL(3)$ となる.

$d \geq 7$ であれば, $g(C) \geq 1$ でも, C が 2重点しかもたないときは, 同様の事実が成立する.

§8. N-極小性

Cを$\mathbb{P}^2$内のd次曲線とする. $\{p_1, \dots, p_\ell\}$をCの(無限に近い)特異点とする. p_jでの重複度をm_jとし, $m_1 \geq m_2 \geq \cdots \geq m_\ell$と仮定しておく. 次の重要な事実は, 鈴木氏により見出された

補題(鈴木). $d \geq m_1 + m_2 + m_3$ なら $P_{m_3}(C \vartheta \mathbb{P}^2) \geq 1$.

証明. $P_1(C \vartheta \mathbb{P}^2) = g(C_\ell)$ だから, $g(C_\ell) = 0$ と仮定してよい. 前節の記号を用いると,

$$K_\ell + C_\ell \sim (d-3)H - \sum_{j=1}^{\ell}(m_j - 1)E_j.$$

ゆえに,

$$m_3(K_\ell + C_\ell) \sim (dm_3 - 3m_3)H - \sum m_3(m_j - 1)E_j =$$
$$(m_3 - 1)dH - \sum m_3(m_j - 1)E_j + (d - 3m_3)H$$
$$\sim (m_3 - 1)C_\ell + \sum (m_3 - m_j)E_j + (d - 3m_3)H.$$

p_1とp_2とを結ぶ直線の$(\mu_2 \circ \mu_1)^{-1}$による強変換をL_{12}とし これのφ_3による逆像を又L_{12}で表す. すると,

$$E_1 + E_2 + L_{12} \sim H.$$

ゆえに，

$$(m_3-m_1)E_1+(m_3-m_2)E_2+(d-3m_3)H\sim$$

$$(d-3m_3)L_{12}+(d-m_1-2m_3)E_1+(d-m_2-2m_3)E_3$$

となりこれは正因子．だから G とおく．

かくして，

$$m_3(K_\ell+C_\ell)\sim(m_3-1)C_\ell+G+\sum_{j=4}^{\ell}(m_3-m_j)E_j$$

となり $P_{m_3}\geq 1$ が示された．

従って, $\kappa(C \subset \mathbb{P}^2) = -\infty$ ならば $d \geqq m_1+m_2+m_3$ である. この不等式は Noether の不等式とよばれている (M. Noether).

さて, $\varphi \in G_2$ をとる. H を $\mathbb{P}^2$ の一般の直線とすると, $\deg(\varphi^{-1}[H])$ を φ の次数とよぶことがある. $C = \varphi^{-1}[H]$ とおけば $(C \subset \mathbb{P}^2)$ と $(H \subset \mathbb{P}^2)$ は双有理同値だから, $\kappa(C \subset \mathbb{P}^2) = \kappa(H \subset \mathbb{P}^2) = \kappa(A^2) = -\infty$. ゆえに, Noether の不等式が成立する. これが, Noether の不等式の起源である.

Noether の不等式の成立しない平面曲線 C を, <u>N-極小</u> とよぶ.
次の問題-予想が解けそうである.

問題-予想. N-極小 $\Longleftrightarrow$ H-相対的極小.

これを仮定すると, C の H-相対的極小性の問題は N-極小に帰着され完全円満に解かれ

29

れと考えられる.

2次変換論との関連では，次のように解けることが望ましい.

Cが N-極小でないとき，2次変換をくり返すことにより Cの次数を下げれる.

N-極小から，川又の極小性が出るだろう.
即ち，C が $d \geq m_1 + m_2 + m_3$ をみたすとき，

1) $g(C_\ell) \geq 1$ なら

$K_\ell + C_\ell$ は半正値(numerically effective)

2) $g(C_\ell) = 0$ なら，$\beta = -C_\ell^2$ とすると，

$K_\ell + C_\ell - 2C_\ell/\beta$ は半正値.

(証明は，容易；[4]参照). 但し，これだけでは，川又の極小性は出ない.
(前田)

即ち，このことにより，$P_m(C \subset \mathbb{P}^2)$ は半正値性の因子の消失定理により，容易に示される.

これらの事により，N-極小性から，H-相対的極小性が示されるであろう. これにより平面曲線の性質が鮮かに取り出されてしまうのである.

30

さらに、

$\kappa(C \forall \mathbb{P}^2) = -\infty$ なら C は N-極小でないから、H-相対的極小でないことがわかれば、2次変換で C の次数が下がり、そこでも $\kappa = -\infty$ が言えるから、ついには直線になる。

そして、次の定理が出る

$$\kappa(C \forall \mathbb{P}^2) = -\infty \iff C \text{ は Cremona 変換で直線になる}$$

これは Coolidge の定理である[1]。Mohan-Kumar[5] は、これを精密にした定式化を 宮西-杉江流の議論で証明した。そこでも藤田の補題 ($\kappa(C+K, S) = -\infty$ なら任意の F に対し、$t \to \infty$ のとき $|F + t(C+K)| = \phi$) が本質的に使われている。

31

Noetherの不等式の重要性を考えると，可約の場合にも，類似の式を考える必要が生じる．

即ち，$C_1+\cdots+C_r$ を $\mathbb{P}^2$ 上の因子とするとき，

$\kappa(C_1+\cdots+C_r \,\&\, \mathbb{P}^2)=-\infty$ なら $C_1+\cdots+C_r$ の特異性について何かいえるか？

は，少し興味深い問題だが難かしい．

もう少しはっきりした形で問題をのべる．

C_1, C_2 を既約とすると，

$\kappa(C_1+C_2 \,\&\, \mathbb{P}^2)=-\infty \Leftrightarrow C_1+C_2$ は Cremona 変換で，2直線に変換される？

は証明できるか？

もっと難しそうな，しかし本質的な問題は3次元版である．

S を $\mathbb{P}^3$ の既約曲面とするとき，

$\kappa(S \,\&\, \mathbb{P}^3)=-\infty$，かつ S を有理曲面とすると，S は，$\mathbb{P}^3$ 内の平面に Cremona 変換でうつせるか？

32

Noether不等式を3次元に一般化することは更に興深く，困難な問題である.

問 $d = \deg S$, $\kappa(S \subset \mathbb{P}^3) = -\infty$ のとき，Sの特異性について成立する不等式を見出せ?

この問題について何がいえるかは何もわからない.

しかし，$\kappa(S \subset \mathbb{P}^3) = -\infty$ のとき，何らかの簡単なCremona変換で，$\deg S$ を下げることができるなら，この種の変換で，Cr_3 が生成されるであろう.

12月2日 城崎にて.

付録（東京に帰ってから）12月21日

pure な双有理変換の概念は実際本質的である．なぜなら，$V \supset D$, $D = \sum_{i=1}^{s} \Gamma_i$, $\Gamma_i = \{\xi_i\}^{-}$ と素因子 Γ_i，その生成点 ξ_i で与えられているとき，R で ξ_i での V の局所環 R_i の共通部分 $\cap R_i$ を表すと $\mathrm{Bir}(D \subset V) = \mathrm{Aut}_k(\cap R_i)$ が成立するからである.

しかし，pure でない双有理写像も有用であ

る．とりわけ，$\mathbb{P}^2$ 内の直線配置の研究に不可欠の手段として，impure standard quadratic transformation が登場してくるが，今だに判然としないことも多いから，ここでは述べられない．しかし，わかりそうでわからないときが，数学で最も楽しいときなので，夢を継続して正月を暮らしたいと思う．

感想．

$\kappa(C \subset \mathbb{P}^2) = 0$ な C は，Cremona 変換で，非特異3次曲線又は，10個の2重点をもつ6次曲線に変換されること（Coolidge, Mohan-Kumar, Mrurthy, Suzuki），そして，$\kappa(C \subset \mathbb{P}^2) = 1$ なる C は $g = 0, 1, \geq 2$ とあり $g \geq 2$ のとき C は超楕円曲線で，各 $C \subset \mathbb{P}^2$ は N-極小のモデルをとると，極めて簡単になること（[4], [5]）がわかるが，この事実は Bertini らの研究によって，ある程度わかっていたらしい．すると，代数曲面論形成以前である．

そこで，概念的歴史を構造論から雑にかんがえてみると，

34

代数曲線 = 閉 Riemann 面の理論

↓

→ 平面曲線の構造論

↙

代数曲面分類論

→ 解析曲面分類論

↓

n (とくに 3) 次元解析多様体分類論

↙ ↓

n次元代数多様体分類論 → $\mathbb{C}$ の多様体の分類論

↓

開代数多様体分類論 → アフィン幾何

↓

双有理射の分類, 構造論

双有理射の幾何が大物であるわけではなく, 言ってみれば, exercise のネタを提供するだけかも知れない. しかし, 又何か興味あるものが産出されるかもしれない. これも初夢である.